

PIRMOSIOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS  $F(x, y, y') = 0$

|                                                      | BENDRASIS PAVIDALAS                                                                                                                                                                                       | SPRENDIMO METODAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>I EILĖS<br/>SU ATSKIRIAMAIS<br/>KINTAMAISIAIS</b> | $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$                                                                                                                                                                     | <p>1. Dalijame abi puses iš <math>M_2(y)N_1(x) \neq 0</math> taip, kad gautume lygtį su <b>atskirtaisiais kintamaisiais</b> <math>\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0</math>.</p> <p>2. Tada: <math>\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy</math>. <b>klaida (-)</b></p> <p>3. Sprendinį, jei įmanoma, užrašome išreikštine funkcija <math>y = f(x, C)</math>.</p> <p>4. Patikriname, ar nėra ypatingųjų sprendinių: <math>M_2(y)N_1(x) = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>I EILĖS<br/>HOMOGENINĖS</b>                       | $y' = f(x, y)$ , jei tik $f(x, y)$ yra <b>nulinio laipsnio homogeninė</b> funkcija, t.y.<br>$f(tx, ty) = t^0 \cdot f(x, y), \forall t \in R$ .                                                            | <p>1. Patikriname ar <math>f(tx, ty) = t^0 \cdot f(x, y)</math>.</p> <p>2. Įvedame keitinį <math>y = u \cdot x</math> (čia <math>u = u(x)</math>),<br/> <math>y' = u' \cdot x + u</math> ir gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais.</p> <p>3. Išsprendę, grįžtame prie pradinių žymėjimų <math>u = \frac{y}{x}</math>.</p> <p>4. Sprendinį, jei įmanoma, užrašome išreikštine funkcija <math>y = f(x, C)</math>.</p> <p>Pastaba: <b>kartais patogiau naudoti keitinį</b> <math>x = u \cdot y</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>I EILĖS<br/>TIESINĖS</b>                          | $y' + P(x)y = Q(x)$                                                                                                                                                                                       | <p><b>Bernulio (kintamojo keitimo) metodas</b></p> <p>1. Įvedamas keitinys <math>y = uv</math>; <math>y' = u'v + uv'</math>.</p> <p>2. Tada:</p> $u'v + uv' + P(x) \cdot uv = Q(x);$ $u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x);$ $\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0; \\ u'v = Q(x). \end{cases}$ <p>Gauname: <math>v = v(x)</math>; <math>u = u(C, x)</math>.</p> <p>3. Sprendinį užrašome <math>y = v(x) \cdot u(C, x)</math>.</p> <p><b>Lagranžo konstantų variacijos metodas</b></p> <p>1. Sprendžiame homogeninę lygtį <math>y' + P(x)y = 0</math>. Gauname sprendinį <math>y = f(x, C)</math>.</p> <p>2. Laikydami, kad <math>C = C(x)</math>, gautą sprendinį užrašome <math>y = f(x, C(x))</math> ir įstatome į nehomogeninę lygtį <math>y' + P(x)y = Q(x)</math>. Iš čia surandame <math>C(x)</math>.</p> <p>3. Gautą <math>C(x)</math> įstatome į 1 punkte surastą <math>y = f(x, C)</math>.</p>                   |
| <b>I EILĖS<br/>BERNULIO</b>                          | $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ; $(n \neq 0; 1)$ .<br>Kai $n > 0$ , Bernulio lygtis turi sprendinį $y=0$ . Be to, jei:<br>a) $n > 1$ , tai $y=0$ – atskirasis spr.<br>b) $0 < n < 1$ tai $y=0$ – ypatingasis spr. | <p>Sprendžiame <b>Bernulio (kintamojo keitimo) metodu</b>, kaip ir tiesinę diferencialinę lygtį.</p> <p><b>Pastaba:</b> Bernulio dif. lygtį galima suvesti į tiesinę dif. lygtį, naudojant keitinį <math>z = y^{1-n}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>PILNOJO<br/>DIFERENCIALO</b>                      | $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$<br>jeigu tik $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ .                                                                                    | <p>1. <math>M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0</math> perrašome: <math>du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0</math>.</p> <p>2. Kadangi lygtis <math>du(x, y) = 0</math>, tai sprendinio ieškome pavidalu <math>u(x, y) = C</math>.</p> <p>3. Pasižymime: <math>\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)</math>, <math>\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)</math>.</p> <p>4. Suintegravę <math>\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)</math> kintamojo <math>x</math> atžvilgiu gauname <math>u(x, y) = \int M(x, y)dx + \phi(y)</math>.</p> <p>5. Ieškome 4-iaame punkte surastos f-jos <math>u(x, y)</math> išvestinės <math>\frac{\partial u}{\partial y}</math> ir prilyginame ją 3-ojo punkto <math>\frac{\partial u}{\partial y}</math>. Iš čia surasim <math>\phi'(y)</math>. Tada <math>\phi(y) = \int \phi'(y)dy + C</math>.</p> <p>6. Sprendinys <math>u(x, y) = C</math></p> |

**ANTROSIOJOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS  $F(x, y, y', y'') = 0$**

|                                                                                  | BENDRASIS PAVIDALAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | SPRENDIMO METODAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>II EILĖS DIF. LYGČIŲ ATSKIRI ATVEJAI</b>                                      | Nėra funkcijos $y$ ir nėra $y'$ , t.y. turime $F(x, y'') = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                       | Išsprendę lygtį $y''$ atžvilgiu, gauname $y'' = f(x)$ . Belieka du kartus suintegruoti pagal kintamąjį $x$ : $y = \int \left( \int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                  | Nėra funkcijos $y$ , t.y.: $F(x, y', y'') = 0$ ar $y'' = f(x, y')$ .<br>arba<br>$F(y', y'') = 0$ ar $y'' = f(y')$ .                                                                                                                                                                                                   | 1. Sprendžiame naudodami keitinį: $y' = \frac{dy}{dx} = p$ (čia $p = p(x)$ ).<br>$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p'$ (tokiu būdu sumažiname diferencialinės lygties eilę).<br>2. Gauname sprendinį $p = \varphi(x, C_1)$ .<br>3. Kadangi $p = y'$ , tai $p = y' = \varphi(x, C_1)$ ir reikia dar kartą integruoti pirmosios eilės dif. lygtį: $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                                                                  | Nėra nepriklausomo kintamojo $x$ , t.y.: $F(y, y', y'') = 0$ ar $y'' = f(y, y')$ .<br>arba<br>$F(y, y'') = 0$ ar $y'' = f(y)$ .                                                                                                                                                                                       | 1. Sprendžiame naudodami keitinį: $y' = \frac{dy}{dx} = p$ (čia $p = p(y)$ ).<br>$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$ .<br>2. Gauname sprendinį $p = \varphi(y, C_1)$ .<br>3. Kadangi $p = y'$ , tai $p = y' = \varphi(y, C_1)$ ir reikia dar kartą integruoti pirmosios eilės dif. lygtį: $p = y' = \varphi(y, C_1)$ , čia $y' = p = \frac{dy}{dx}$ .<br>Atskyrę kintamuosius ir suintegravę, gausime sprendinį $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ arba $y = f(x, C_1, C_2)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>II EILĖS TIESINĖS HOMOGENINĖS DIF. LYGTYS (su pastoviais koeficientais)</b>   | $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Lygčiai spręsti sudarome charakteringąją lygtį $k^2 + p \cdot k + q = 0$ .<br>Pagal jos šaknis $k_1$ ir $k_2$ nustatome, kaip bus užrašomas homogeninės dif. lygties bendrasis sprendinys:<br>a) $k_1$ ir $k_2$ realios ir skirtingos. Tada $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ .<br>b) $k_1 = k_2 = k$ . Tada $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$ .<br>c) $k_1 = \alpha + \beta i$ ir $k_2 = \alpha - \beta i$ . Tada $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>II EILĖS TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIF. LYGTYS (su pastoviais koeficientais)</b> | $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ ;<br>Laisvasis narys $f(x)$ yra atskiras atvejis reiškiniu:<br>$f(x) = e^{hx} \cdot [P_1(x) \cdot \cos \gamma x + P_2(x) \cdot \sin \gamma x]$<br>čia<br>$h, \gamma$ - pastovieji dydžiai;<br>$P_1(x)$ ir $P_2(x)$ - daugianariai, kurių aukščiausiasį laipsnį pažymėkime $n$ . | Tiesinės nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys $y$ yra lygus $y = \bar{y} + y^*$ ; čia $\bar{y}$ - homogeninės lygties bendrasis sprendinys; $y^*$ - nehomogeninės lygties atskiras sprendinys.<br>Kai $f(x) = e^{hx} \cdot [P_1(x) \cdot \cos \gamma x + P_2(x) \cdot \sin \gamma x]$ , tai $y^*$ užrašome:<br>a) jei $h + \gamma i$ nėra charakteringosios lygties šaknis, tai $y^* = e^{hx} \cdot [Q_1(x) \cdot \cos \gamma x + Q_2(x) \cdot \sin \gamma x]$ (čia $Q_1$ ir $Q_2$ pilni $n$ -tojo laipsnio daugianariai su nežinomais koeficientais $Q_1(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$ , $Q_2(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$ ).<br>b) jei $h + \gamma i$ yra charakteringosios lygties viena šaknis, tai $y^* = x e^{hx} \cdot [Q_1(x) \cdot \cos \gamma x + Q_2(x) \cdot \sin \gamma x]$<br>c) jei $h + \gamma i$ yra charakteringosios lygties kartotinė šaknis, tai $y^* = x^2 e^{hx} \cdot [Q_1(x) \cdot \cos \gamma x + Q_2(x) \cdot \sin \gamma x]$ |

|                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>II EILĖS<br/>TIESINĖS<br/>NEHOMOGENINĖS<br/>DIF. LYGTYS</b><br>(su pastoviais<br>koeficientais) | $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x);$ <p><i>Laisvasis narys <math>f(x)</math> nėra atskiras atvejis reiškiniu:</i></p> $f(x) = e^{hx} \cdot [P_1(x) \cdot \cos \gamma x + P_2(x) \cdot \sin \gamma x]$ | <p><b>Lagranžo konstantų variacijos metodas:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Surandame homogeninės dif. lygties <math>y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0</math> bendrąjį sprendinį <math>y = C_1 y_1 + C_2 y_2</math> aukščiau nagrinėtais metodais.</li> <li>2. Tada nehomogeninės. dif. lygties bendrąjį sprendinį užrašome <math>y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2</math>.</li> <li>3. <math>C_1'(x)</math> ir <math>C_2'(x)</math> randame iš <math display="block">\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0; \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x); \end{cases}</math></li> <li>4. <math>C_1(x) = \int C_1'(x) dx + C_1^*</math> ir <math>C_2(x) = \int C_2'(x) dx + C_2^*</math>.</li> </ol> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                   |                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>II EILĖS<br/>TIESINĖS<br/>HOMOGENINĖS<br/>DIF. LYGTYS</b><br>(su kintamais<br>koeficientais)   | $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$                                                                      | <p>Tokią dif. lygtį galima išspręsti:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. kai lygtis nepilna (antros eilės d.l. atskiri atvejai, žr. aukščiau).</li> <li>2. kai žinomas vienas atskiras jos sprendinys <math>y_1</math>. Šiuo atveju pagal Ostrogradskio-Liuvilio formulę bendrasis sprendinys užrašomas <math display="block">y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \text{ čia } y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx.</math></li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>II EILĖS<br/>TIESINĖS<br/>NEHOMOGENINĖS<br/>DIF. LYGTYS</b><br>(su kintamais<br>koeficientais) | $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x);$                                                                  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Surandame homogeninės dif. lygties <math>y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0</math> bendrąjį sprendinį <math>y = C_1 y_1 + C_2 y_2</math> aukščiau nagrinėtais metodais.</li> <li>2. Tada nehomogeninės. dif. lygties bendrąjį sprendinį užrašome <math>y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2</math>.</li> <li>3. <math>C_1'(x)</math> ir <math>C_2'(x)</math> randame iš <math display="block">\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0; \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x); \end{cases}</math></li> <li>4. <math>C_1(x) = \int C_1'(x) dx + C_1^*</math> ir <math>C_2(x) = \int C_2'(x) dx + C_2^*</math>.</li> </ol> |
| <b>II EILĖS<br/>DIF. LYGTIES,<br/>SUDARYMAS</b>                                                   | <p>Jeigu žinome du tiesiškai nepriklausomus dif. lygties sprendinius <math>y_1</math> ir <math>y_2</math></p> | <p>Determinantą <math display="block">\begin{vmatrix} y_1 &amp; y_2 &amp; y \\ y_1' &amp; y_2' &amp; y' \\ y_1'' &amp; y_2'' &amp; y'' \end{vmatrix} = 0</math> išskleidę paskutinio stulpelio elementais, gauname ieškomąją lygtį.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Funkcijos  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  vadinamos **tiesiškai priklausomomis** atkarpoje  $[a, b]$ , jei  $\frac{y_1}{y_2} = \text{const}$  arba Vronskio determinantas

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Bet kurie du tiesiškai nepriklausomi tiesinės homogeninės diferencialinės lygties sprendiniai sudaro **fundamentaliąją sprendinių sistemą**.